# ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

| | | |
|---|---|---|
| CONOURS DIRECT D'ENTREE A L'ENS | DISCIPLINE : CAP/ PC MATHEMATQUES/ TICE | SESSION : 2025 |
| EPREUVE : ALGEBRE | | DUREE : 3 Heures |

**Exercice 1**

Soient E un espace vectoriel réel et $B = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de E.
On considère I la matrice unité et l'endomorphisme $f$ de E défini par :
$f(e_1) = e_1$ ; $f(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_1 + 2e_2 + e_3$.

1.
   a. Que peut-on dire du nombre réel 1 pour $f$ ?
   b. Déterminer la matrice $A$ de $f$ relativement à la base $B$.
   c. Montrer que $f$ est un automorphisme de E.
2.
   a. Montrer qu'il existe une matrice $T$ que l'on déterminera telle que $A = I + T$.
   b. Déterminer les matrices $T^2$ et $T^3$.
   c. Pour $n$ dans $IN$, en déduire $A^n$.

**Exercice 2**

On pose $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus |z| = 1\}$.
Soit $\varphi: IR \to G$, définie par $\varphi(x) = e^{i2\pi x}$, où , $i^2 = -1$.

1.
   a. Montrer que (G;.) est un groupe
   b. Le groupe (G;.) est-il commutatif ?
   c. Déterminer trois éléments de $G \setminus \{1\}$, d'ordre fini.
2.
   a. Montrer que $\varphi$ est un morphisme $(IR, +)$ dans $(G, .)$.
   b. Déterminer $Im(\varphi)$.
   c. Déterminer le noyau de $\varphi$.
   d. En déduire que $G$ est isomorphe à $IR/\mathbb{Z}$.

**Exercice 3**

Soit $A$ un anneau, tel que $\forall a \in A, a^2 = a$.

1. Montrer que $A$ est de caractéristique 2.
   *On pourra calculer* $(a + a)^2$ *pour tout* $a \in A$.
2. Montrer que A est un anneau commutatif
   *On pourra calculer* $(a + b)^2$ *pour tout* $(a; b) \in A^2$.