ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

CONOURS DIRECT D'ENTREE A L'ENS	DISCIPLINE : CAP/ PL MATHEMATQUES	SESSION : 2025
EPREUVE : ALGEBRE		DUREE : 3 Heures

Exercice 1

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = 2x + z \\ z' = -2x + y \end{cases}.$$

Où x, y, z sont des fonctions de t.

Exercice 2

Soient $(G;.)$ un groupe d'élément neutre e.

1- Soit H un sous-groupe de G tel que $[G:H] = 2$.

Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

2- Soient H et K deux sous-groupes distingués de G tels que $H \cap K = \{e\}$.

Montrer que pour tout $h \in H$ et tout $k \in K$, on a $hk = kh$.

3- Soient H et K deux sous-groupes de G, conjugués dans G (c'est-à-dire qu'il existe $a \in G$ tel que $K = aHa^{-1}$) et N un sous-groupe distingué de G.

Montrer que NH et NK sont deux sous-groupes de G, conjugués dans G.

Exercice 3

On dit qu'un anneau A est booléen si et seulement si pour tout $x \in A, x^2 = x$.

1. Montrer qu'anneau booléen est de caractéristique 2. (On pourra calculer $(x + x)^2$ pour tout $x \in A$).

2. Montrer qu'anneau booléen est commutatif (On pourra calculer $(x + y)^2$ pour tout $x, y \in A$).

3. Donner la structure complète d'un anneau booléen intègre.

En déduire que dans un anneau booléen, tout idéal premier est maximal

ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

CONOURS DIRECT D'ENTREE A L'ENS	DISCIPLINE : CAP/ PL MATHEMATIQUES	SESSION : 2025
EPREUVE : ANALYSE		DUREE : 3 Heures

Exercice 1

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait :
$|f(x) - f(y)| \leq 3|sinx - siny|$.

1) Montrer que 2π est période de f.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

1) Justifier que I_n est bien définie.
2) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
3) Justifier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite
4) La série $\sum_{n\geq1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 3

1) Soit E une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0

   Démontrer que la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur E.

2) On considère la suite de fonctions (g_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{sin(nx)}{1 + n^2x^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Etudier la convergence simple de la suite (g_n).
   b) Etudier la convergence uniforme de la suite (g_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x(1 + cosx) - 2tanx}{2x - sinx - tanx}$ et 2) $\lim\limits_{x\to1} \frac{sin(lnx) - \sqrt{\left|ln\left(sin\frac{\pi}{2}x\right)\right|}}{x - 1}$