

Epreuve : ALGÈBRE

Durée : 3 heures

Cette épreuve comporte trois (03) exercices indépendants.

Exercice 1

Dans un espace vectoriel réel, noté E , on désigne respectivement par Φ et e , l'endomorphisme nul et l'application identité de E .

Soit f un élément de $L(E)$, tel que $f^2 = \Phi$.

1. Montrer que $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$.
2. On considère g un élément de $L(E)$ tel que $g = e + f$.
 - a. Montrer que g est un automorphisme de E .
 - b. Déterminer g^{-1} .
3. On suppose que $E = \mathbb{R}^3$.
 - a. Montrer que $\dim(\text{Im} f) \leq \dim(\text{Ker} f)$.
 - b. En déduire alors que $\dim(\text{Im} f) \leq 2$.
 - c. Montrer qu'il existe une forme linéaire h sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = h(\vec{x})\vec{u}$.

Exercice 2

Dans un ensemble non vide E , on considère A et B , deux parties non vides.

Soit $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par : pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$

$$f(X) = (X \cap A; X \cap B)$$

1. Déterminer $f(E)$; $f(A)$; $f(B)$; $f(\emptyset)$; $f(A \cup B)$ et $f(A \cap B)$ où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit injective.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit surjective.
4. En déduire de ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 3

Soient $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif d'élément neutre e , H un sous-groupe distingué de G tel que $[G:H] = p$, avec p un entier naturel premier.

1. Pour tout sous-groupe K de G , montrer que si K n'est pas inclus dans H , alors $G = KH$.
2. On suppose que K est fini. Montrer alors que $[K] = p[K \cap H]$.

