Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
République de Côte d'Ivoire
Union – Discipline – Travail
ECOLE NORMALE SUPERIEURE D'ABIDJAN

Session 2024 : Concours direct d'entrée pour la préparation du CAP/PL MATHEMATIQUES (Professeur de Lycée)

Epreuve : ANALYSE ET PROBABILITES **Durée : 3 heures**

Exercice 1 : On veut étudier et représenter la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\cos x)^3 + (\sin x)^3 .$$

1. Justifier que f est une fonction périodique et faire une restriction de l'étude.
2. Calculer et factoriser la dérivée de f.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
4. En déduire le signe de $(\sin x - \cos x)$ *sur* $[-\pi, \pi]$; puis dresser le tableau de f sur $[-\pi, \pi]$.
5. Construire la représentation graphique de f sur $[-\pi, \pi]$.
(Echelle : abscisse π unités=4cm ; Ordonnée 1unité=1cm)

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$U_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

1. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Démontrer que la suite (V_n) définie par $V_n = \ln(U_n)$ est convergente vers une limite qu'on précisera.
3. En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 3 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) = \frac{1}{2}x + 3.$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{2}f(x) + 3$.
2. Montrer que f' est constante et que $f'(x) = f'(6)$
3. Montrer que f est une fonction affine dont on précisera les paramètres